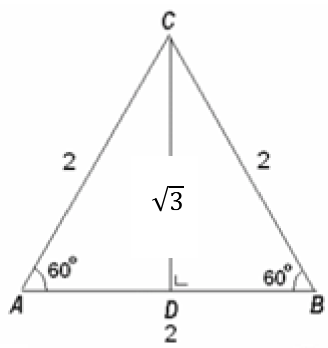
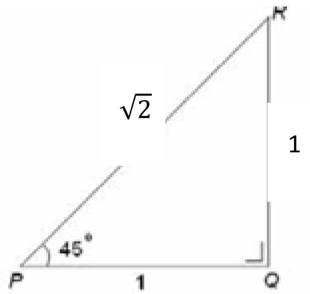
PARAGRAAF 14.1 : VERGELIJKINGEN IN DE MEETKUNDE

LES 1 : VERGELIJKINGEN MAKEN BIJ MEETKUNDIGE FIGUREN

HERHALING

(1) Bijzondere rechthoekige driehoeken





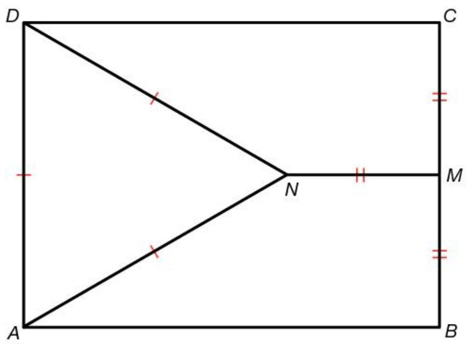
(2) Regel verschil van kwadraten : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(3) Wortelrekenen :

$$\frac{4}{\sqrt{8}+2} = \frac{4}{\sqrt{8}+2} \times \frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}-2} = \frac{4\sqrt{8}-8}{(\sqrt{8})^2-(2)^2} = \frac{4\cdot 2\sqrt{2}-8}{8-4} = \frac{8\sqrt{2}-8}{4} = 2\sqrt{2}-2$$

VOORBEELD 1

Gegeven is de volgende figuur met ADN een gelijkzijdige driehoek en MC = MN = MB.



figuur 14.11

a. Leg uit waarom er een cirkel door de punten B, C en N gaat en bepaal de lengte van de straal.

b. Bereken exact de lengte van AB als je weet dat MN = 10.

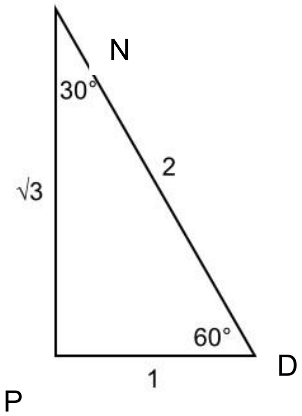
Gegeven is nu alleen dat de omtrek van ABCD gelijk is aan 100.

c. Bereken exact de lengte van AD en schrijf deze in de vorm $AD = a + b\sqrt{c}$.

OPLOSSING 1

a. Als je een cirkel tekent met middelpunt M en straat MC gaat deze door N en B omdat MC = MN = MB.

b. Noem P het punt halverwege AD. Je krijgt dan een 30-60-90 driehoek :



Er geldt $AP = MC = MN = 10$

Dus $PN = 10\sqrt{3}$

Dus $AB = PN + MN = 10\sqrt{3} + 10$

c. Nu geldt dat $AP = x$.

Dus $AB = PN + MN = x\sqrt{3} + x$ en $AD = 2PD = 2x$

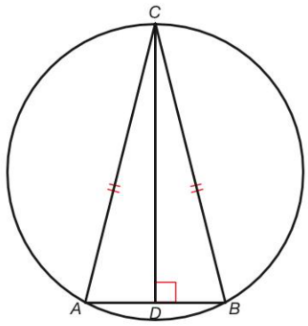
Er geldt dat de omtrek gelijk is aan 100 dus :

$$2AB + 2AD = 100$$
$$AB + AD = 50$$
$$x\sqrt{3} + x + 2x = 50$$
$$x(\sqrt{3} + 3) = 50$$
$$x = \frac{50}{\sqrt{3}+3} = \frac{50}{\sqrt{3}+3} \times \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3} = \frac{50\sqrt{3}-150}{3-9} = \frac{50\sqrt{3}-150}{-6} = -\frac{50}{6}\sqrt{3} + 25$$

Omdat AD = 2AP is dus $AD = 2\left(-\frac{50}{6}\sqrt{3} - 25\right) = -\frac{50}{3}\sqrt{3} + 50$

VOORBEELD 2

Gegeven is een cirkel met straal 8. De punten A, B en C liggen op de cirkel zo, dat AC = BC en verder is de hoogte CD twee keer de lengte van AB. Bereken exacte de lengte van AB.



OPLOSSING 2

(1) $Stel\ AD = x.$

$Dan\ is\ AB = 2x\ en\ CD = 4x$

(2) Teken middelpunt en straal AM

$CM = AM = 8$

$DM = 4x - 8$

(3) Stelling van Pythagoras in driehoek ADM

$AD^2 + MD^2 = AM^2$

$x^2 + (4x - 8)^2 = 8^2$

$x^2 + 16x^2 - 64x + 64 = 64$

$17x^2 - 64x = 0$

$x(17x - 64) = 0$

$x = 0 \quad v \quad 17x = 64$

$x = \frac{64}{17}$

(4) $AB = 2 \cdot \frac{64}{17} = \frac{128}{17} = 7\frac{9}{17}$

VOORBEELD 3

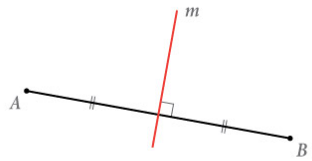
Opgave 15 blz 59

PARAGRAAF 14.2 : VERGELIJKINGEN IN DE MEETKUNDE

LES 1 MIDDELLOODLIJN EN BISSECTRICE

DEFINITIE MIDDELLOODLIJN

Voor punt P op de middelloodlijn van AB geldt :
$d(P,A) = d(P,B)$ *of* $PA = PB.$



BEREKENEN MIDDELLOODLIJN

Er zijn drie manieren om dit te berekenen :

(1) Afstandformule : d(P,A) = d(P,B)
(2) Normaalvector : $\overrightarrow{r_{AB}} = \overrightarrow{n_{mll}}$
(3) Richtingscoëfficiënt : $RC_{mll} \cdot RC_{AB} = -1$

VOORBEELD 1

Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van de punten A=(3,4) en B=(9, 7).

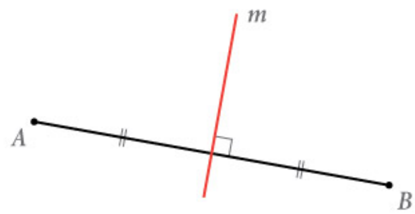
OPLOSSING (1) : AFSTAND

Voor ieder punt P=(x,y) op de mll geldt dat d(P,A) = d(P,B). Dus :

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-9)^2+(y-7)^2}$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2 = (x-9)^2+(y-7)^2$$
$$x^2-6x+9+y^2-8y+16 = x^2-18x+81+y^2-14y+49$$
$$12x+25+6y=130$$
$$12x+6y=105\ .$$

Dus de vergelijking van de middelloodlijn is $12x+6y=105$

OPLOSSING (2) : NORMAALVECTOR



(1) $r_{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (dus $r_{mll} = n_{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$)

Dus $n_{mll} = r_{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

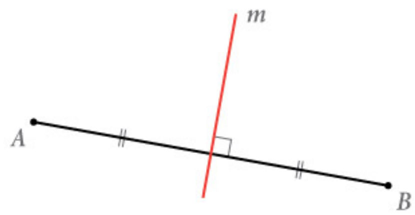
Dus $6x + 3y = c$

(2) $M = \left(\frac{12}{2}, \frac{11}{2}\right) = (6, 5\frac{1}{2})$ ligt op de mll dus

$6 \cdot 6 + 3 \cdot 5\frac{1}{2} = 36 + 16\frac{1}{2} = 52\frac{1}{2} = c$

(3) Dus mll : $6x + 3y = 52\frac{1}{2} \rightarrow 12x + 6y = 105$

OPLOSSING (3) : RC



(1) $rc_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-4}{9-3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(2) $rc_{mll} \times rc_{AB} = -1 \quad dus \;\; rc_{mll} = -2$

$Dus\; y = -2x + b$

(3) Midden van AB : $M = \left(\frac{12}{2}, \frac{11}{2}\right) = (6, 5\frac{1}{2})$

(4) M ligt op mll dus :

$5\frac{1}{2} = -2 \cdot 6 + b$

$5\frac{1}{2} = -12 + b$

$b = 17\frac{1}{2}$

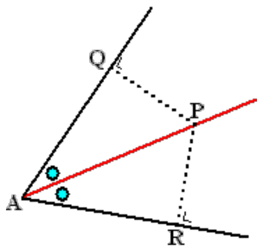
(5) Mll : $y = -2x + 17\frac{1}{2} \rightarrow 2x + y = 17\frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{12x + 6y = 105}$

LES 2 BISSECTRICE EN AFSTAND PUNT - LIJN

DEFINITIE BISSECTRICE

Voor ieder punt P op de bissectrice van de lijnen l (AQ) en k (AR) geldt dat d(P, l) = d(P, k) oftewel PQ = PR.

UITLEG (OPTIONEEL) :



(1) Als je de bissectrice van hoek A tekent (de lijn AP) en je kijkt naar de twee driehoeken dan kun je met de congruentieregels (nu veel te moeilijk) laten zien dat de driehoeken APR en APQ gelijk zijn. Dus daarom is $\angle PAR = \angle PAQ$

(2) Omdat de driehoeken gelijk zijn is PR = PQ dus is de afstand gelijk

---

DEFINITIE AFSTAND PUNT - LIJN

Gegeven punt R = (p,q) en lijn k : ax + by = c.

Dan geldt dat de afstand van punt P tot lijn k geldt : d(R , k) = $\dfrac{|ap + bq - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

VOORBEELD 1

Bepaal de afstand van lijn k : 3x +4y = 5 en het punt (2,4).

OPLOSSING 1

d(P , k) = $\dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|17|}{\sqrt{25}} = \dfrac{17}{5} = 3{,}4$

BEREKENEN BISSECTRICE

(1) Afstandsformule : d(P,l) = d(P,k)

(2) Ruitmethode : $\overrightarrow{r_{bis}} = |\overrightarrow{AC}| \cdot \overrightarrow{r_{AB}} + |\overrightarrow{AB}| \cdot \overrightarrow{r_{AC}}$ (Boek !!)

VOORBEELD 2

Bepaal de vergelijking van de bissectrice van lijn *k* : 7x + 24y = 10 en lijn *l* : 3x - 4y = 8. Het snijpunt van deze lijnen is S = (2,32 ; -0,26)

OPLOSSING 2

Dit kan op twee manieren :

OPLOSSING 2.1 : AFSTAND

Voor ieder punt P = (x,y) op de bissectrice geldt dat d(P , l) = d(P , k).

$$\frac{|3x-4y-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|7x+24y-10|}{\sqrt{7^2+24^2}} \qquad \{ \text{KV} \}$$

$$25 \cdot |3x - 4y - 8| = 5 \cdot |7x + 24y - 10|$$

Nu zijn er twee oplossingen / bissectrices :

(1) $25 \cdot (3x - 4y - 8) = 5 \cdot (7x + 24y - 10)$

$75x - 100y - 200 = 35x + 120y - 50$

$40x - 220y = 150$

$\mathbf{4x - 22y = 15}$ **(Bissectrice 1)**

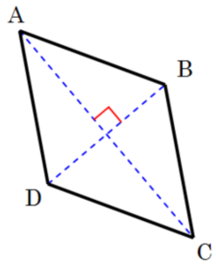
(2) $25 \cdot (3x - 4y - 8) = -5 \cdot (7x + 24y - 10)$

$75x - 100y - 200 = -35x - 120y + 50$

$110x + 20y = 250$

$\mathbf{11x + 2y = 25}$ **(Bissectrice 2)**

OPLOSSING 2.2 : RUITMETHODE



- Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.
- De diagonalen delen de hoeken middendoor (= bissectrice).

Je kunt nu door de zijden van lijn *k* en *l* gelijk te maken heel eenvoudig de bissectrice(s) berekenen :

(1) Richtingsvector bepalen van *k* en *l*

$$n_k = \binom{7}{24} \rightarrow r_k = \binom{24}{-7}$$

$$n_l = \binom{3}{-4} \rightarrow r_l = \binom{4}{3}$$

(2) Lengte bepalen van de richtingsvectoren

$$|r_k| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = 25$$

$$|r_l| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

(3) Lengte van beide vectoren gelijk maken door $r_{bis} = |r_k| \times r_l + |r_l| \times r_k$

$$r_{bis1} = 5 \times \binom{24}{-7} + 25 \times \binom{4}{3} = \binom{120}{-35} + \binom{100}{75} = \binom{220}{40} \cong \binom{22}{4}$$

Dit geeft $n_{bis1} = \binom{4}{-22} \rightarrow 4x - 22y = c$

Snijpunt $S = (2{,}32\ ;\ -0{,}26)$ invullen geeft $4x - 22y = 15$

(4) Tweede bissectrice door een richtingsvector te veranderen, bijv $r_k = \binom{-24}{7}$

$$r_{bis2} = 5 \times \binom{-24}{7} + 25 \times \binom{4}{3} = \binom{-120}{35} + \binom{100}{75} = \binom{-20}{110} \cong \binom{-2}{11}$$

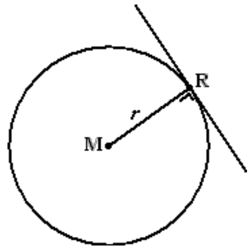
Dit geeft $n_{bis2} = \binom{11}{2} \rightarrow 11x + 2y = c$

Snijpunt S = (2,32 ; -0,26) invullen geeft $11x + 2y = 25$

OPMERKING

De 2e methode werkt het beste als je 3 punten hebt gegeven (A / B / C). Als je dan de bissectrice van hoek B wil weten, MOET je $r_{BA} = A - B$ en $r_{BC} = C - B$ doen !!!

LES 3 : RAAKLIJN AAN CIRKEL



Je hebt 3 gegevens bij een raaklijn aan cirkel probleem :

GEGEVENS

(1) Vergelijking van cirkel c : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ { en dus M = (a,b) }

(2) Raakpunt R op de cirkel

(3) Vergelijking van raaklijn k

OPLOSSINGSMETHODEN

A. Raken dus D = 0

B. $RC_{MR} \cdot RC_k = -1$

C. Straal = Afstand van M tot lijn k (punt R)

dus $r = d(M,k) = \frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

WELKE METHODE MOET JE WANNEER GEBRUIKEN ?

1. Methode A gebruik je alleen als je :
- **bij de lijn k de a en/of de b weet.**
- **De cirkelvergelijking weet.**

VOORBEELD 1.

Gegeven is de cirkelvergelijking $(x+6)^2+y^2=16$ en de lijn k met vergelijking y = ax + 1.

Bereken exact voor welke a de lijn y = ax + 1 de raaklijn is.

OPLOSSING 1

Vul y = ax + 1 in in $(x+6)^2 + y^2 = 16$. Dit geeft :

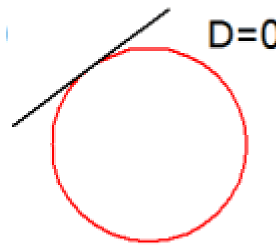
(1) Vul y = ax + 1 in :

$$(x+6)^2 + (ax+1)^2 = 16$$

$$x^2 + 12x + 36 + a^2x^2 + 2ax + 1 = 16$$

$$(a^2+1)x^2 + (12+2a)x + 21 = 0$$

(2) Deze raakt de cirkel als de D gelijk is aan nul :



$$D = (12+2a)^2 - 4(a^2+1)\cdot 21$$

$$D = 4a^2 + 48a + 144 - 84a^2 - 84 = 0$$

$$D = -80a^2 + 48a + 60 = 0$$

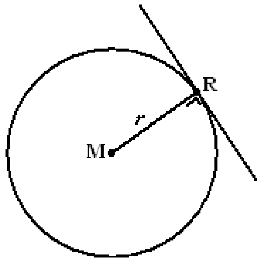
(3) Oplossen met abc-formule

$$D = 48^2 - 4\cdot -80\cdot 60 = 21504$$

$$a = \frac{-48+\sqrt{21504}}{-160} \quad v \quad a = \frac{-48-\sqrt{21504}}{-160}$$

2. Als je twee van de drie gegevens hebt kun je methode B of C gebruiken.

VOORBEELD 2.



Punt R = (3 , 6) ligt op de cirkel $(x-4)^2+(y-5)^2=5$

Stel een vergelijking op van de raaklijn k in punt R.

OPLOSSING 2.

We moeten eerst de rc van lijn r weten en dan is het herhaling :

(1) Middelpunt M = (4,5).

(2) $rc_r = \frac{6-5}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1.$

(3) $rc_r \times rc_k = -1 \;\rightarrow\; -1 \times rc_k = -1 \;\rightarrow\; rc_k = 1$

(4) Vergelijking lijn k is y = 1·x + b = x + b

(5) Lijn gaat door R = (3 , 6) dus : 6 = 3 + b → $b = 3$

(6) Lijn k : y = x + 3

3. Als je <u>alleen</u> de cirkelvergelijking weet, gebruik je methode C.

VOORBEELD (BLZ 68)

Je weet het raakpunt niet en je weet niks over y = ax + b.

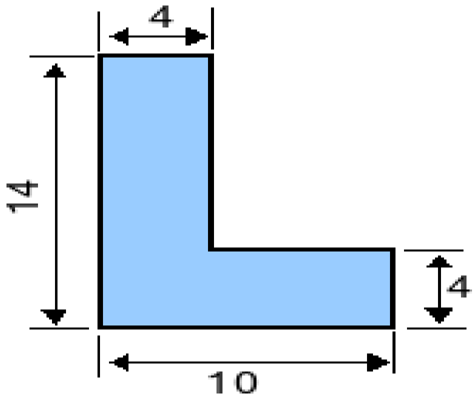
PARAGRAAF 14.3 : ZWAARTEPUNTEN

DEFINITIES

- $z =$ { Zwaartepunt } = { Evenwichtspunt van het figuur }
- $O =$ { Basis } = { Vaak de Oorsprong }
- Zwaartepunt = { Gewogen gemiddelde van de figuren }
  > Dit hangt af van de gewichten (=oppervlakte figuur) en de richtingsvector van de afzonderlijke zwaartepunten
- $m_1 =$ { Massa van punt 1 } = { oppervlakte van een figuur I }
- $r_{m_1} =$ { Richtingsvector van m_1 }
- $M =$ { Totale massa } $= m_1 + m_2 + \cdots$

BEREKENING ZWAARTEPUNT Z

$z = \frac{1}{M}\{m_1 \cdot r_{m_1} + m_2 \cdot r_{m_2} + \cdots\}$



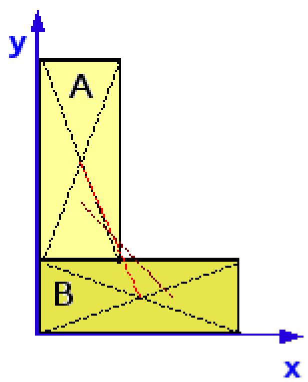
VOORBEELD 1

Gegeven is figuur 1.

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt.

OPLOSSING 1

We delen de figuur op in twee makkelijke delen :



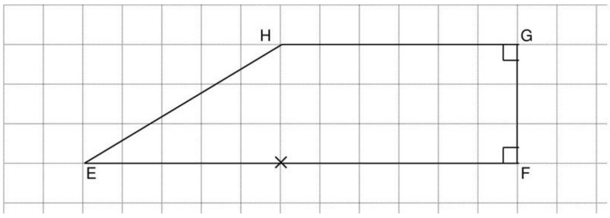
1. De middelpunten van A en B zijn punten :
   $m_A = (2\ ,\ 9)$ en $m_B = (5\ ,\ 2)$.
2. De oppervlakte (massa) is allebei = 4 x 10 = 40.
   Dus M = 40 + 40 = 80.
3. $z = \frac{1}{M}\{m_A \cdot\ Opp\ A + m_B \cdot Opp\ B\} =$

$$z = \frac{1}{80}\left(40 \cdot \binom{2}{9} + 40 \cdot \binom{5}{2}\right) = \frac{40}{80}\binom{2}{9} + \frac{40}{80}\binom{5}{2} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dus $z = (3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$

VOORBEELD 2

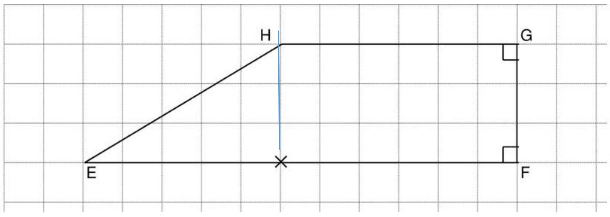
Gegeven is figuur.



Bereken de coördinaten van het zwaartepunt. (Noem het kruisje punt X)

OPLOSSING 2

Trek hulplijn HX. Noem de driehoek figuur 1 en de rechthoek figuur 2.



Noem Punt E = (0,0). Je moet nu eerst het middelpunt/zwaartepunt van driehoek EXH (figuur 1) berekenen :

(1) E = (0,0) en X = (5,0) en H = (5,3)

Coördinaten van $m_1 = \frac{1}{3}\{1 \cdot r_E + 1 \cdot r_X + 1 \cdot r_H\} = \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\1\end{pmatrix}$

(2) $Opp\ figuur\ 1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7\frac{1}{2}$

(3) $Opp\ figuur\ 2 = 5 \times 3 = 15\ \ en\ m_2 = \begin{pmatrix}8\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

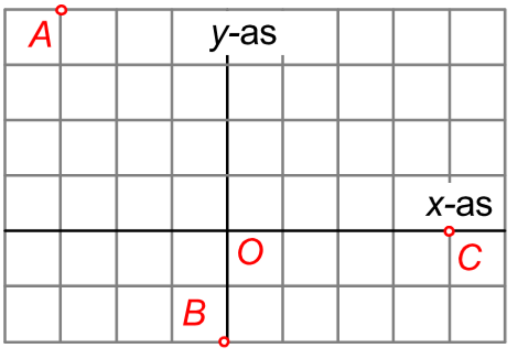
(4) $z = \frac{1}{M}\{m_A \cdot Opp\ A + m_B \cdot Opp\ B\} = \frac{1}{7\frac{1}{2}+15}\left(7\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\1\end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix}8\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$

$z = \begin{pmatrix}\frac{10}{9}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{58}{9}\\1\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Dus $z = (\frac{58}{9}, 1\frac{1}{3})$

VOORBEELD 3

Gegeven is een figuur met drie gewichten. A, B en C hebben respectievelijk een gewicht van 10, 5 en 2 kg. Bepaal het exact de coördinaten van het zwaartepunt Z.



OPLOSSING 3

We nemen de oorsprong als basis.

1. Dan is $OA = \binom{-3}{4}$; $OB = \binom{0}{-2}$; $OC = \binom{4}{0}$
2. $z = \frac{1}{M}\{m_A \cdot\ Opp\ A + m_B \cdot Opp\ B + m_C \cdot\ Opp\ C\} =$

$$z = \frac{1}{5+2+10}\left(10 \cdot \binom{-3}{4} + 5 \cdot \binom{0}{-2} + 2 \cdot \binom{4}{0}\right) = \frac{1}{17}\left(\binom{-30}{40} + \binom{0}{-10} + \binom{8}{0}\right) =$$

$$z = \frac{1}{17}\binom{-22}{30} = \begin{pmatrix} -\frac{22}{17} \\ \frac{30}{17} \end{pmatrix}$$

dus de coördinaat is $(-\frac{22}{17}, \frac{30}{17})$

PARAGRAAF 14.4 : BEWEGINGSVERGELIJKINGEN

DEFINITIE KROMME

- Kromme = { een figuur waarbij de x en y coördinaat uitgedrukt worden in een 3e variabele t }
- Voorbeeld is de eenheidscirkel met x = cos (t) en y = sin (t).

DEFINITIE PLAATS / SNELHEID / VERSNELLING

(1) $r(t) = \{\, plaatsvector\ (coördinaat)\ op\ tijdstip\ t\, \} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

(2) $v(t) = \{\, snelheidsvector\ op\ tijdstip\ t\, \} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

(3) $a(t) = \{\, versnellingsvector\ op\ tijdstip\ t\, \} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$

DEFINITIE BAAN…

(1) $|v(t)|$ = { Baansnelheid }

$$|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

(2) $|a(t)|$ = { Baanversnelling }

$$|a(t)| = \frac{inproduct\ v\ en\ a}{lengte\ v} = \frac{v(t) \cdot a(t)}{|v(t)|}$$

DEFINITIE RAAKLIJN

(1) Horizontale raaklijn $\rightarrow y'(t) = 0\ en\ x'(t) \neq 0$
(2) Verticale raaklijn $\rightarrow x'(t) = 0\ en\ y'(t) \neq 0$
(3) Keerpunt $\rightarrow x'(t) = 0\ en\ y'(t) = 0$

VOORBEELD > BLZ 86